

Tablas actuariales de supervivencia y mortalidad dinámicas con hoja de cálculo

Antonio Fernández Morales

Departamento de Economía Aplicada (Estadística y Econometría)
Universidad de Málaga, 2021

Resumen

Las tablas de supervivencia y mortalidad actuariales de carácter dinámico permiten la proyección de probabilidades anuales de fallecimiento para fechas futuras, así como la elaboración de tablas completas para generaciones nacidas en un año concreto. Mediante los procedimientos descritos en este trabajo, usando la hoja de cálculo, se puede automatizar la obtención de estos resultados.

Palabras clave— Actuarial, tablas de supervivencia, hoja de cálculo, tablas PER2020.

Clasificación JEL— G22, C22, I13.

1. Introducción

En el ámbito actuarial, las tablas de supervivencia y mortalidad dinámicas están adquiriendo una presencia creciente. De hecho, la Dirección General de Seguros ha publicado recientemente [1] un conjunto de tablas de supervivencia de este tipo, tablas PER2020, para seguros de supervivencia. Esta clase de tabla de mortalidad permite obtener probabilidades de fallecimiento que varían no sólo con la edad o el sexo, sino también con el paso del tiempo físico o de calendario (habitualmente en sentido decreciente). Las tablas de mortalidad dinámicas ofrecen una alternativa más sencilla al uso de modelos paramétricos más complejos, ya sea predictivos ([2], [3], [4], [5], [6]) o descriptivos ([7], [8]).

Generalmente, las tablas de supervivencia y mortalidad dinámicas se ofrecen en formatos simplificados, que contienen una tabla base y fórmulas de cálculo que permiten la generación de tablas específicas para cada año de calendario futuro o para generaciones de individuos nacidos en un año determinado. Para este objetivo, las hojas de cálculo son una de las herramientas más utilizadas por su flexibilidad y simplicidad.

Dentro de la línea de trabajo que se viene realizando en la Universidad de Málaga sobre recursos tecnológicos para la formación actuarial ([9], [10], [11], [12], [13], [14]), que pueden ser de utilidad en modalidades de enseñanza con componente virtual ([15], [16]), se presenta en este trabajo una guía para la elaboración de un generador de tablas de mortalidad basadas en la información contenida en tablas de mortalidad dinámicas, también denominadas generacionales. Este trabajo es una actualización de [17], en el que se incorporan las nuevas tablas de supervivencia PER2020. Se muestra de forma esquemática como elaborar una tabla en hoja de cálculo con las probabilidades anuales de fallecimiento por edades para una generación y para un año de calendario futuro, de forma que se pueda recalcular automáticamente cambiando el año de nacimiento o el año de calendario futuro, según corresponda.

2. Conceptos

En una tabla de supervivencia o de mortalidad dinámica, la tasa anual de mortalidad $q_{x,t}$ depende de:

- la edad, x
- el año de calendario, t

Ejemplos de tablas de mortalidad dinámicas para uso actuarial que siguen este enfoque se muestran a continuación:

- Tablas españolas PER2020 [1]

- Tablas españolas PER2000 [18]
- Tablas españolas PEB 2014 [19]
- Tablas alemanas DAV 2004R [20]
- Tablas austríacas AVÖ 2005R [21]

Una tabla de mortalidad dinámica se puede representar como una matriz (Tabla

1). No obstante, en la práctica actuarial se suele presentar sólo:

- La mortalidad en el año de calendario base, para todas las edades
- Una función o factor de reducción anual, para todas las edades

Tabla 1: Tasas de mortalidad de una tabla dinámica

Edad	Calendario				
x	t_0	t_1	t_2	t_3	\dots
0	q_{0,t_0}	q_{0,t_1}	q_{0,t_2}	q_{0,t_3}	\dots
1	q_{1,t_0}	q_{1,t_1}	q_{1,t_2}	q_{1,t_3}	\dots
2	q_{2,t_0}	q_{2,t_1}	q_{2,t_2}	q_{2,t_3}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots

3. Modelo

El modelo basado en factores de reducción es ampliamente utilizado en tablas de mortalidad dinámicas en el ámbito actuarial [22]. La especificación general consiste en:

$$q_{x,t} = q_{x,t_0} e^{-F(x)(t-t_0)} \quad (1)$$

Las tasas anuales de mortalidad según esta especificación dependen de los dos factores multiplicativos siguientes:

- Tasas anuales de mortalidad correspondientes al año base t_0 : q_{x,t_0}
- Mejoras de mortalidad multiplicativas (factor de reducción): $FR(x, t - t_0) = e^{-F(x)(t-t_0)}$,

de manera que $q_{x,t} = q_{x,t_0} FR(x, t - t_0) = q_{x,t_0} e^{-F(x)(t-t_0)}$

3.1. Ejemplo

En las tablas españolas PER2020, la tasa anual de mortalidad para la edad x y el año t , $q_{x,t}$, se puede escribir como:

$$q_{x,t} = q_{x,2012} e^{-\lambda_x(t-2012)} \quad (2)$$

donde:

- el año base es 2012
- la función $F(x)$ está tabulada como λ_x

Alternativamente, se puede expresar la tasa de mortalidad $q_{x,t}$ de este modelo en función del año de nacimiento g de un individuo o de una generación, $q_{x,g+x}$, teniendo en cuenta que los individuos de esta generación cumplen la edad x en el año de calendario $t = x + g$, resultando:

$$q_{x,g+x} = q_{x,2012} e^{-\lambda_x(g+x-2012)} \quad (3)$$

4. Aplicación con hoja de cálculo

Utilizando la información del modelo especificado en una tabla de mortalidad dinámica, la hoja de cálculo se convierte en un instrumento muy eficaz para obtener las tasas de mortalidad para cualquier año de calendario futuro y/o generación [23]. A continuación se presenta, de forma esquemática el procedimiento para su construcción, distinguiendo entre el caso de la elaboración de una tabla con las probabilidades anuales de fallecimiento para un año de calendario futuro y el caso que corresponde a una generación.

4.1. Año de calendario futuro

La obtención de las probabilidades anuales de fallecimiento para un año de calendario futuro se realizará tomando como ejemplo las tablas españolas PER2020. En concreto, se utilizará la tabla de segundo orden para seguros individuales de supervivencia para la población femenina.

El procedimiento de cálculo de las tasas de mortalidad en un año de calendario t , $q_{x,t}$, se resume en:

- $q_{x,2012}$ disponibles
- λ_x disponibles
- calcular $e^{-\lambda_x(t-2012)}$
- calcular $q_{x,t} = q_{x,2012}e^{-\lambda_x(t-2012)}$

4.1.1. Ejemplo

Generaremos con una hoja de cálculo las tasas de mortalidad previstas para el colectivo femenino según la tabla PER2020 de segundo orden para seguros individuales (PER2020.Ind.2ndo.orden) en el año $t=2025$. Los datos disponibles se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2: Datos disponibles

	A	B	C	D	E	F
1	$t =$					
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$t - 2012$	$e^{-\lambda_x(t-2012)}$	$q_{x,t}$
3	0	0,002176	0,035			
4	1	0,000145	0,035			
5	2	0,000124	0,035			
6			

El procedimiento de calculo se puede esquematizar en las siguientes etapas:

- En la columna D calculamos cuántos años se aplica la mejora de mortalidad, usando la celda B1 en la fórmula (Tabla 3).
- En la columna E calculamos el factor de reducción por edad, $e^{-C \cdot D}$ (Tabla 4).
- Las tasas del año 2025 son el producto de las columnas B y E (Tabla 5).
- Por último, modificando la celda B1 se pueden recalcular automáticamente las tasas para otro año futuro. En la Tabla 6 se muestran los resultados para el año 2030.

Las columnas D y E se han incluido en este ejemplo para facilitar la comprensión del mecanismo de generación de las tasas anuales recogidas en la columna F. Sin embargo, se puede automatizar aún más su obtención con una fórmula directa que use los datos de las columnas B y C y del valor de la celda B1, haciendo innecesarias las columnas D y E de cálculos intermedios.

Tabla 3: Años de mejora

	A	B	C	D	E	F
1	t =	2025				
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$t - 2012$	$e^{-\lambda_x(t-2012)}$	$q_{x,2012}$
3	0	0,002176	0,035	13		
4	1	0,000145	0,035	13		
5	2	0,000124	0,035	13		
6		

Tabla 4: Factor de reducción

	A	B	C	D	E	F
1	t =	2025				
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$t - 2012$	$e^{-\lambda_x(t-2012)}$	$q_{x,2012}$
3	0	0,002176	0,035	13	0,6344	
4	1	0,000145	0,035	13	0,6344	
5	2	0,000124	0,035	13	0,6344	
6	

Tabla 5: Tasas 2025

	A	B	C	D	E	F
1	t =	2025				
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$t - 2012$	$e^{-\lambda_x(t-2012)}$	$q_{x,2025}$
3	0	0,002176	0,035	13	0,6344	0,001381
4	1	0,000145	0,035	13	0,6344	0,000092
5	2	0,000124	0,035	13	0,6344	0,000079
6

Tabla 6: Tasas 2030

	A	B	C	D	E	F
1	t =	2030				
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$t - 2012$	$e^{-\lambda_x(t-2012)}$	$q_{x,2030}$
3	0	0,002176	0,035	18	0,5326	0,001159
4	1	0,000145	0,035	18	0,5326	0,000077
5	2	0,000124	0,035	18	0,5326	0,000066
6

4.2. Generación

De nuevo emplearemos la tabla española PER2020 para la obtención de las tasas anuales de mortalidad, en este caso, para una generación: las nacidas en el año g . El proceso de cálculo de las tasas de mortalidad para las nacidas en el año g , requiere obtener las tasas de mortalidad en diferentes años de calendario; en concreto, para cada edad x , el año de calendario correspondiente es $t = g + x$. El proceso de cálculo se puede resumir en:

- $q_{x,2012}$ disponibles
- λ_x disponibles
- calcular $e^{-\lambda_x(g+x-2012)}$
- calcular $q_{x,g+x} = q_{x,2012}e^{-\lambda_x(g+x-2012)}$

4.2.1. Ejemplo

Construiremos con una hoja de cálculo las tasas anuales de mortalidad previstas según la tabla PER2020 de segundo orden para seguros individuales (PER2020.Ind.2ndo.orden) para generación de mujeres nacidas en el año $g = 2000$. En la Tabla 7 se presentan los datos disponibles en la tabla original.

Tabla 7: Datos disponibles

	A	B	C	D	E	F
1	$g =$	2000				
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$g + x - 2012$	$e^{-\lambda_x(g+x-2012)}$	$q_{x,2000+x}$
...			
83	80	0,023873	0,0261			
84	81	0,027628	0,0253			
85	82	0,031957	0,0243			
...			

Los pasos a seguir para realizar la construcción de la tabla de la generación de nacidas en 2000 son los siguientes:

- En la columna D calculamos cuántos años se aplica la mejora de mortalidad, usando la celda B1 y las edades de la columna A (Tabla 8).
- En la columna E calculamos el factor de reducción por edad, $e^{-C \cdot D}$ (Tabla 9).
- Las tasas para una nacida en 2000 son el producto de las columnas B y E (Tabla 10).

- Modificando la celda B1 se puede recalcular automáticamente para otro año de nacimiento, por ejemplo para las nacidas en el año 1990, $g = 1990$ (Tabla 11).

De nuevo hemos utilizado las columnas D y E para realizar cálculos intermedios que facilitan la comprensión del mecanismo de generación de las tasas anuales incluidas en la columna F. En este caso también se puede automatizar su obtención con una fórmula directa que no requiere la presentación de los cálculos intermedios en las columnas D y E.

Tabla 8: Años de mejora

	A	B	C	D	E	F
1	g =	2000				
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$g + x - 2012$	$e^{-\lambda_x(g+x-2012)}$	$q_{x,2000+x}$
...		
83	80	0,023873	0,0261	68		
84	81	0,027628	0,0253	69		
85	82	0,031957	0,0243	70		
...		

Tabla 9: Factor de reducción

	A	B	C	D	E	F
1	g =	2000				
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$g + x - 2012$	$e^{-\lambda_x(g+x-2012)}$	$q_{x,2000+x}$
...	
83	80	0,023873	0,0261	68	0,170033	
84	81	0,027628	0,0253	69	0,174744	
85	82	0,031957	0,0243	70	0,182034	
...	

Tabla 10: Tasas nacidas en 2000

	A	B	C	D	E	F
1	g =	2000				
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$g + x - 2012$	$e^{-\lambda_x(g+x-2012)}$	$q_{x,2000+x}$
...
83	80	0,023873	0,0261	68	0,169517	0,0041
84	81	0,027628	0,0253	69	0,174523	0,0048
85	82	0,031957	0,0243	70	0,182501	0,0058
...

Tabla 11: Tasas nacidas en 1990

	A	B	C	D	E	F
1	g =	1990				
2	x	$q_{x,2012}$	λ_x	$g + x - 2012$	$e^{-\lambda_x(g+x-2012)}$	$q_{x,1990+x}$
...
83	80	0,023873	0,026055	68	0,220644	0,0053
84	81	0,027628	0,025282	69	0,225009	0,0062
85	82	0,031957	0,024337	70	0,233191	0,0074
...

5. Conclusiones

El uso de hojas de cálculo para la elaboración de tablas de mortalidad se puede considerar como uno de los instrumentos más eficaces y populares en el campo profesional actuarial, especialmente cuando se trata de tablas de mortalidad dinámicas o generacionales. La flexibilidad que aporta la tecnología asociada a las hojas de cálculo para el trabajo con matrices de datos permite maximizar la gestión de la información cuantitativa, al tiempo que simplifica notablemente la mecánica de cálculo para la proyección de probabilidades de fallecimiento anuales.

En este trabajo se ha presentado un mecanismo de generación de tablas de mortalidad, tanto para generaciones nacidas en el mismo año, como para años de calendario futuros, que resulta de una indudable utilidad para la posterior realización de cálculos actuariales. La implementación realizada en los ejemplos se ha elaborado con las tablas españolas PER2020, aunque dada su flexibilidad puede ser replicada sin dificultad para otras tablas de tipo dinámico o generacional.

Referencias

- [1] Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (2020). *Resolución de 17 de diciembre de 2020*, BOE núm. 338, de 28 de diciembre de 2020.
- [2] Mitchell, D., Brockett, P., Mendoza-Arriaga, R., Muthuraman, K. (2013). Modeling and forecasting mortality rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 52(2), 275-285.
- [3] Deng, Y., Brockett, P., MacMinn, R. (2012). Longevity/mortality risk modeling and securities pricing. *Journal of Risk and Insurance*, 79(3), 697-721.
- [4] Yang, S., Yue, J., Huang, H. (2010). Modeling longevity risks using a principal component approach: a comparison with existing stochastic mortality models. *Insurance: Mathematics and Economics*, 46(1), 254-270.

- [5] Booth, H., Hyndman, R., Tickle, L., Jong, P.D. (2006). Lee–Carter mortality forecasting: a multi-country comparison of variants and extensions. *Demographic Research*, 15, 289–310.
- [6] Renshaw, A., Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 38, 556–570.
- [7] Fernández-Morales, A. (2008). Métodos de graduación paramétrica de la mortalidad en el ámbito actuarial para la población andaluza. *Cuadernos de Ciencias Económicas y Empresariales. Papeles de trabajo*, 36, 83–100.
- [8] Fernández-Morales, A. (2009). Graduación de la mortalidad en Andalucía con modelos de mortalidad con heterogeneidad inobservable. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 15, 23–50.
- [9] Fernández-Morales, A., Mayorga-Toledano, M. C. (2021). Using an on-line interactive graphical simulator to experiment with late-life mortality models. 15th International Technology, Education and Development Conference, INTED2021 Proceedings, pp. 9656–9662.
- [10] Fernández-Morales, A. (2020). Micro simulación de modelos de supervivencia en edades avanzadas para Ciencias Actuariales. RIUMA, Universidad de Málaga. <https://hdl.handle.net/10630/20543>
- [11] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2019). Enhancing actuarial educations with interactive online resources. 13th International Technology, Education and Development Conference, INTED2019 Proceedings, pp. 9139–9145.
- [12] Fernández-Morales, A. (2017). Simulating lifetimes with actuarial survival models. 9th International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN17 Proceedings, pp. 725–731.
- [13] Fernández-Morales, A. (2015). Application of a Discrete-time Markov Chain Simulation in Insurance. *International Journal of Recent Contributions from Engineering, Science and IT*, 3(3), 27–32.
- [14] Fernández-Morales, A. (2011). Learning Survival Models with On-Line Simulation Activities in the Actuarial Science Degree. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 6 (1), 15–19.
- [15] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2021). Students’ perceptions of the teaching and learning mode adopted in the MSc in Actuarial Science at the University of Málaga during COVID-19 first wave. 15th International Technology, Education and Development Conference, INTED2021 Proceedings, pp. 9650–9655.

- [16] Mayorga-Toledano, M. C., Fernández-Morales, A. (2020). Assessing the face-to-face to virtual learning adpatation process of the MSc in Actuarial Science at the University of Málaga. 13th annual International Conference of Education, Research and Innovation, ICERI2020 Proceedings, pp. 6232-6240.
- [17] Fernández-Morales, A. (2016). Tablas de mortalidad dinámicas con hoja de cálculo en la práctica actuarial. RIUMA, Universidad de Málaga. <http://hdl.handle.net/10630/10922>
- [18] Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (2000). *Resolución de 3 de octubre de 2000*, BOE núm. 244, de 11 de octubre de 2000.
- [19] Instituto de Actuarios Españoles (2014). *Bases Técnicas Actuariales del Sistema para la valoración de los daños y perjuicios causados a las personas en accidentes de circulación*.
- [20] DAV-Unterarbeitsgruppe Rentnersterblichkeit (2005). Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik*, XXVII(2), 199–313.
- [21] Kainhofer, R., Predota, M. y Schmock, U. (2006). Die neue österreichische Rententafel AVÖ 2005R, *Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs*, 13, 55-136.
- [22] Pitacco, E. (2004). Survival models in a dynamic context: a survey. *Insurance: Mathematics and Economics*, 35, 279-298.
- [23] Fernández-Morales, A, (2005). *Tutorial para la construcción de tablas de mortalidad dinámicas PERM/F 2000 con hoja de cálculo*. RIUMA, Universidad de Málaga.